Istituzioni di Matematiche
CdL Scienze Biologiche

Def Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$. $f(x)$ si dice limitata

$\exists M > 0 \ : \ |f(x)| \leq M \quad \forall x \in A$

Esempio

$$|\operatorname{sen} x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$|\cos x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Teorema Siano $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in DA$

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

e $g(x)$ è limitata

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \\ g(x) \text{ è limitata} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$$

Dim (Ip1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

(Ip2) $\exists M > 0 \ : \ |g(x)| \leq M \quad \forall x \in A$

Da (Ip1) considero $\frac{\varepsilon}{M} > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A$ con

$x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Longrightarrow |f(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$

ossia

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Ma se $x \in A \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[$

si ha

$$|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{\cancel{M}} \cdot \cancel{M} = \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$$

<u>Esempio</u>

$$\lim_{x \to 1} (x-1) \cdot \cos\left(\frac{1}{\lg x}\right)$$

Noto che $\displaystyle\lim_{x \to 1} x-1 = 1-1 = 0$

$$\left|\cos\left(\frac{1}{\lg x}\right)\right| \leq 1 \quad \forall x \in]0,+\infty[$$

Dal teorema precedente $\Longrightarrow \displaystyle\lim_{x \to 1} (x-1) \cos\left(\frac{1}{\lg x}\right) = 0$

<u>Def</u> (estremi assoluti di una funzione)

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, un punto $x_M \in A$ si dice <u>punto di massimo assoluto</u> per $f(x)$ se accade

$$f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in A$$

$$f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in A$$

Un punto $x_m \in A$ si dice <u>punto</u> di <u>minimo assoluto</u> per $f(x)$ se accade

$$f(x_m) \leq f(x) \quad \forall x \in A$$

<u>Def</u> (Estremi Relativi)

Se $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, un punto $x_1 \in A$ si dice punto di <u>max relativo</u> per $f(x)$ se

$$\exists\, r_1 > 0 \; : \quad f(x) \leq f(x_1) \quad \forall x \in A \cap \,]x_1 - r_1, x_1 + r_1[$$

Un punto $x_2 \in A$ si dice punto di <u>min relativo</u> per $f(x)$ se

$$\exists\, r_2 > 0 \quad f(x_2) \leq f(x) \quad \forall x \in A \cap \,]x_2 - r_2, x_2 + r_2[$$

<u>Def</u> (Immagine di una funzione)

Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$. Si definisce <u>immagine</u> di <u>$f(x)$</u> il seguente insieme

$$\operatorname{Im} f = \{ f(x) \; : \; x \in A \}$$

<u>Def</u> (Estremi di una funzione)

Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$. Si definisce <u>estremo superiore</u> di $f(x)$ su A come

$f(x)$ su A come

$$\sup_A f \stackrel{def}{=\!=} \sup \operatorname{Im} f$$

$$\inf_A f \stackrel{def}{=\!=} \inf \operatorname{Im} f$$

<u>Def</u> (Continuità)

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. $f(x)$ si dice <u>continua</u> su <u>x_0</u> se accade

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in A \text{ con } x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$
$$\Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

<u>Oss</u> se $x_0 \in A$ e <u>non</u> è di <u>accumulazione</u> per A (tali punti si dicono <u>isolati</u>)

Ossia $\exists r > 0 : \;]x_0 - r, x_0 + r[\cap A = \{x_0\}$

Se per la continuità scelgo $\boxed{\delta = r > 0}$

$$\forall x \in A \text{ con } x \in]x_0 - r, x_0 + r[\Longrightarrow x = x_0$$

$$\Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$$

<u>Conclusione</u> Ogni funzione $f(x)$ è <u>automaticamente</u> continua nei <u>punti</u> <u>isolati</u> di <u>A</u>

Invece, nei punti di accumulazione $x_0 \in DA$ la definizione di continuità coincide con

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Punti di discontinuità

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap DA$

1. x_0 si dice discontinuità eliminabile se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \text{con} \quad l \neq f(x_0)$$

Si chiama eliminabile perché se definiamo la nuova funzione

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ l & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

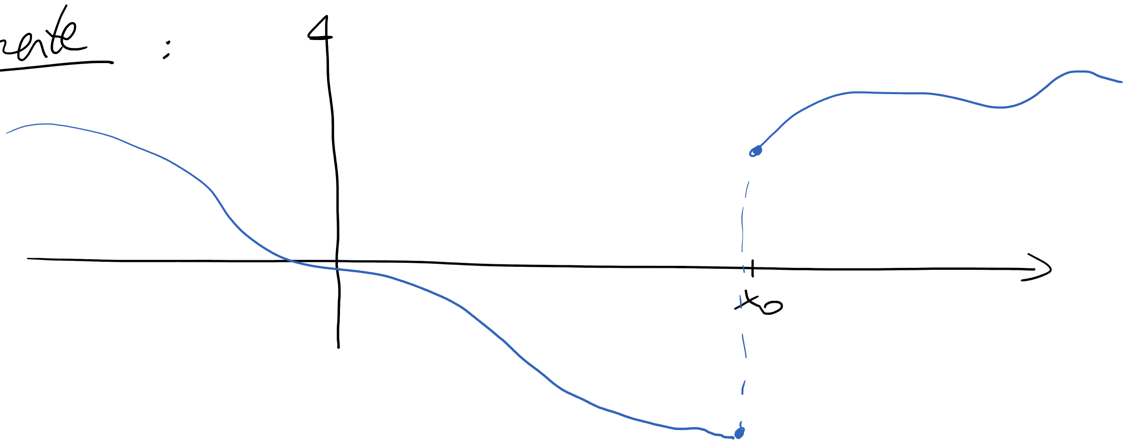
$\Longrightarrow$ $g(x)$ è continua in x_0

2. x_0 si dice discontinuità di 1ª specie se

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}, \quad \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$$

ma $l_1 \neq l_2$

Graficamente :

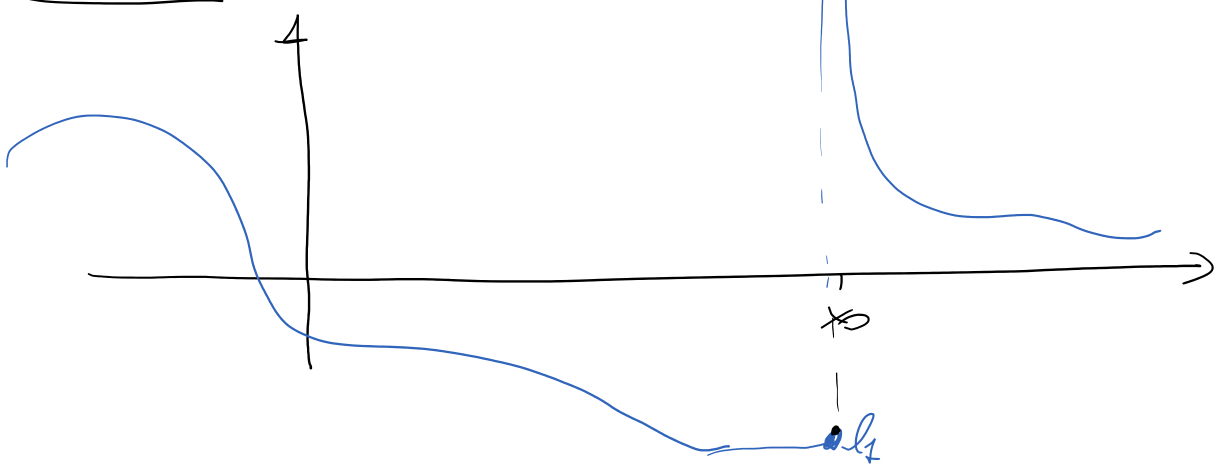


③ x_0 si dice discontinuità di 2^a specie se

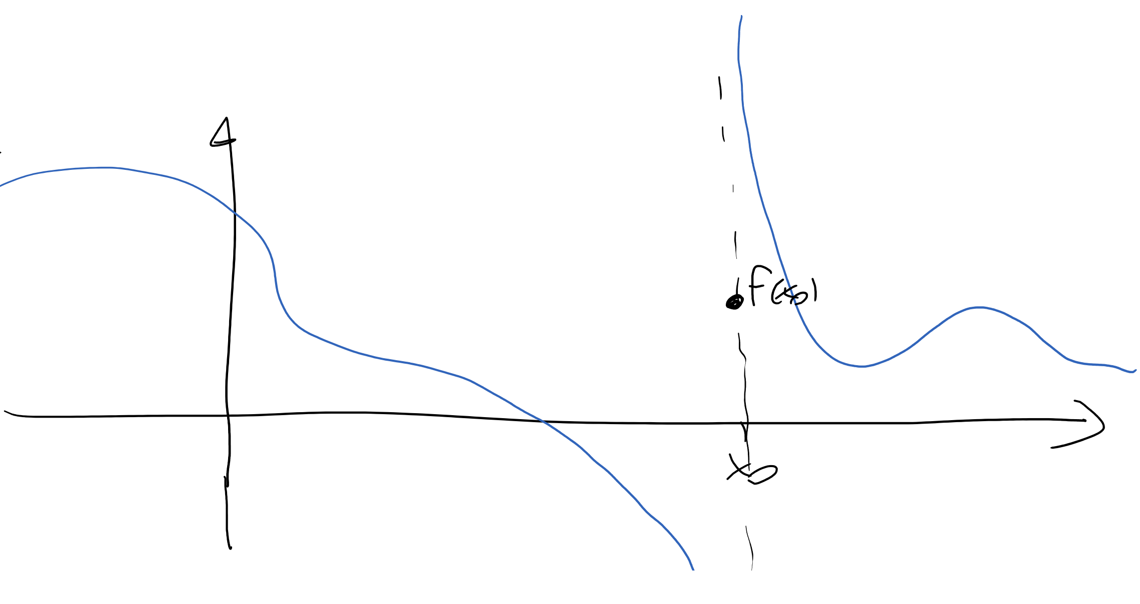
$\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)$

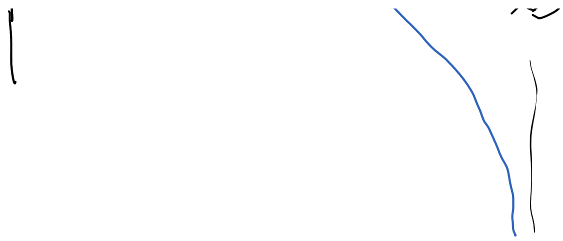
e almeno uno dei due limite è $\pm\infty$

Graficamente



Esempio





④ x_0 si dice <u>discontinuità</u> di <u>3ª specie</u> se almeno uno dei due limiti non esiste

o $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ oppure $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$

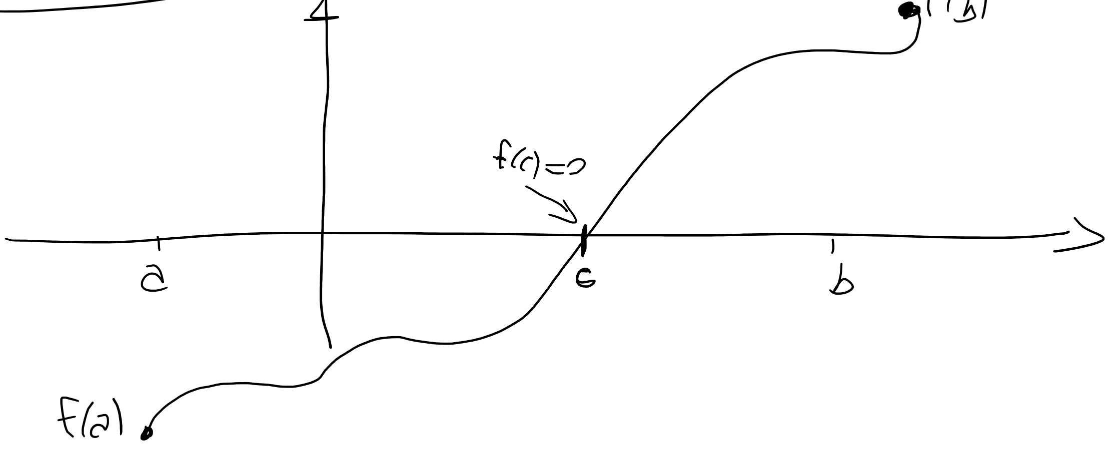
<u>Teorema</u> (Esistenza degli zeri)

Sia $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ (ossia continua in ogni punto di $[a,b]$) tale che

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

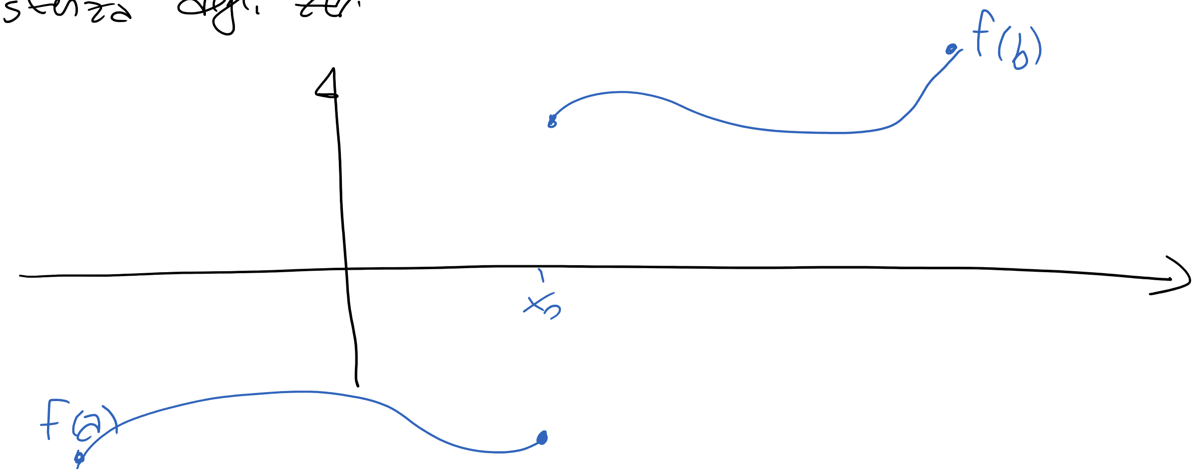
$$\Longrightarrow \exists\, c \in \,]a,b[\qquad f(c) = 0$$

<u>Graficamente</u>



Se $f(x)$ non è continua non vale il teo...

Se $f(x)$ non è continua non vale il teorema esistenza degli zeri



Corollario (Teorema dei valori intermedi di Darboux)

Sia $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su (a,b)

Allora

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ con $\inf_{(a,b)} f < \lambda < \sup_{(a,b)} f$

$\exists\ x_0 \in (a,b) : f(x_0) = \lambda$

Dim Definiamo una funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - \lambda$$

e verifico tutte le ipotesi del teorema esistenza degli zeri per $g(x)$

$$\inf_{(a,b)} f < \lambda$$

$\Longrightarrow$ (2^e inf) $\exists\, x_1 \in (a,b)$: $\boxed{\inf_{(a,b)} f < f(x_1) < \lambda}$

$$\lambda < \sup_{(a,b)} f$$

$\Longrightarrow$ (2^e sup) $\exists\, x_2 \in (a,b)$: $\boxed{\lambda < f(x_2) < \sup_{(a,b)} f}$

Se considero $g : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ si ha

$$g(x_1) = f(x_1) - \lambda < 0$$

$$g(x_2) = f(x_2) - \lambda > 0$$

$\Longrightarrow$ da Esistenza degli zeri $\exists\, x_0 \in (x_1, x_2)$:

$$0 = g(x_0) = f(x_0) - \lambda$$

$$\Longleftrightarrow \quad f(x_0) = \lambda$$

Grazie a Darboux possiamo determinare facilmente l'immagine di una <u>funzione</u> <u>continua</u>

Se $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua Allora

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \left(\inf_{(a,b)} f \,,\, \sup_{(a,b)} f\right)}$$

Se invece $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ è tale che

$f(x)$ è continua in $(a,b) \setminus \{x_0\}$

(ossia x_0 è discontinuità)

In tal caso utilizzo Darboux 2 volte:

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \left(\inf_{(a,x_0[} f \,,\, \sup_{(a,x_0[} f\right) \cup \left(\inf_{]x_0,b)} f \,,\, \sup_{]x_0,b)} f\right)}$$

Dalla condizione di continuità attraverso $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

si ha facilmente

1) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono continue

$\Longrightarrow$ $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

sono ancora funzioni continue

Analogamente

Teorema (continuità funzioni composte)

Se $f: A \to B$ e $g: B \to \mathbb{R}$

sia $x_0 \in A$ e $y_0 = f(x_0) \in B$

se $f(x)$ è continua in x_0 ...

Se $f(x)$ è continua in x_0
e $g(x)$ è continua in y_0 $\Big\} \Longrightarrow g(f(x))$ è continua in x_0

Teorema (Weierstrass)

Se $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua su $[a,b]$

$\Longrightarrow f(x)$ ammette max assoluto e
min assoluto

Importante. Nel teorema di Weierstrass l'intervallo $[a,b]$ deve essere chiuso e limitato (condizione fondamentale)

Esercizio

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \left(\frac{\sqrt{9} - 3}{9 - 9} = \frac{0}{0} \text{ f.i.} \right)$$

$$\boxed{\text{Ricordo } (a-b)(a+b) = a^2 + \cancel{ab} - \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2}$$

$$\lim_{x \to 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)}{x - 9} \cdot \frac{(\sqrt{x} + 3)}{\sqrt{x} + 3} =$$

$$= \lim_{x \to 9} \frac{(\sqrt{x})^2 - 3^2}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x \to 9} \frac{\cancel{x-9}}{\cancel{(x-9)}\underbrace{(\sqrt{x}+3)}_{\to 6}} = \frac{1}{6}$$

Eserc...

Esercizio $\lim_{x \to +\infty} -3x^2 + 7x - 1 = -\infty$

Esercizio $\lim_{x \to -\infty} x^3 - 5x + 2 = -\infty$

Esercizio $\lim_{x \to +\infty} \frac{5^x - 4^x}{1 - 2^x} =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{5^x}{2^x} \frac{\left(1 - \frac{4^x}{5^x}\right)}{\left(\frac{1}{2^x} - 1\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^x \frac{\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^x\right)}{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1\right)} = -\infty$$

$+\infty$ $\to 0$ $\to 0$ $\to -1$

Esercizio $\lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2 + 5x - 4}{2x^2 + 7} = -\frac{1}{2}$

Esercizio $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 5} = (\infty - \infty$ F.I.)

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-2x+5}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-2x+5}\right)}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-2x+5}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\cancel{x^2}+x+1) - (\cancel{x^2}-2x+5)}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-2x+5}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x - 4}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-2x+5}} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x - 4}{\sqrt{x^2}\ \underbrace{\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}\right]}_{\to 2}} =$$

$\frac{1}{x} \to 0$, $\frac{1}{x^2} \to 0$, $\frac{2}{x} \to 0$, $\frac{5}{x^2} \to 0$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{3x-4}{x}}_{\to 3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}} = \frac{3}{2}$$

Esercizio

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-2x+5} = (\infty - \infty)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-2x+5}\right) \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-2x+5}\right)}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-2x+5}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3x - 4}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-2x+5}} =$$

$$= \lim \frac{3x - 4}{\sqrt{\ }} \cdot \frac{1}{\ } =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3x-4}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{1}{\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}\right]} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\frac{3x-4}{-x}}_{\to -3} \; \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}}_{\to \frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}$$

<u>Esercizio</u>

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{\underbrace{\log^2 x}_{\to +\infty} + \underbrace{\log x}_{\to -\infty} + 2} + \underbrace{\log x}_{\to -\infty} = (*)$$

Sia

$$y = \log x \qquad \lim_{x \to 0^+} y = -\infty$$

$$(*) \overset{(cv)}{=} \lim_{y \to -\infty} \underbrace{\sqrt{y^2+y+2}}_{\to +\infty} + \underbrace{y}_{\to -\infty} \qquad (\infty - \infty \text{ f.i.})$$

$$= \lim_{y \to -\infty} \left(\sqrt{y^2+y+2}+y\right) \frac{\left(\sqrt{y^2+y+2}-y\right)}{\sqrt{y^2+y+2}-y} =$$

$$= \lim_{y \to -\infty} \frac{(\cancel{y^2}+y+2) - \cancel{y^2}}{\sqrt{y^2+y+2}-y} = \lim_{y \to -\infty} \frac{y+2}{\underbrace{\sqrt{y^2+y+2}-y}_{\to +\infty}} =$$

$$= \lim_{y \to -\infty} \frac{y+2}{\sqrt{y^2}\sqrt{1+\frac{1}{y}+\frac{2}{y^2}} - y} = \lim_{y \to -\infty} \frac{y+2}{-y\sqrt{1+\frac{1}{y}+\frac{2}{y^2}} - y} =$$

$$\ell \quad \frac{y+2}{\quad} \cdot \frac{1}{\quad} \to \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{y \to -\infty} \frac{y+2}{-y} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{y}+\frac{2}{y^2}}+1} = -\frac{1}{2}$$

$\to -1$

$\to \frac{1}{2}$